



CÁLCULO DIFERENCIAL

LUNA GARCÍA

En ambos casos, se puede ver que la aproximación del valor de $f(x)$ siempre es 1, tanto de derecha a izquierda como viceversa. De acuerdo con lo antes mencionado, podemos intuir que el límite de la función $f(x)$ es 1, cuando el valor de la variable independiente x se acerca a 4 y se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$$

https://www.youtube.com/watch?v=H_E3Qb-ot4w

Ejemplo 1:

Estimar el valor del siguiente $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)$ límite:

Para resolver este límite, primero hay que proporcionar valores a la variable próximos al punto $x = 2$.



x	3	2.5	2.1	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	6	3.25	1.41	1.2025	1.16	1.1209	1.0804	1.0401	1.004001	1.00040001

$$y = x^2 - 3$$

x	1	1.5	1.7	1.9	1.95	1.97	1.98	1.99	1.999	1.9999
$f(x)$	-2	-0.75	-0.11	0.61	0.8025	0.8809	0.9204	0.9601	0.996001	0.99960001

De acuerdo con los datos representados en la primera tabla, podemos darnos cuenta de que entre más nos aproximamos a 2, los valores obtenidos se aproximan a 1. Por su parte, en la segunda tabla de igual forma entre más nos acercamos a 2, los valores se aproximan al 1. En ese sentido, podemos deducir que el límite de esta función es 1.

<https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw>

De tal forma que, si resolvemos el límite de la siguiente forma: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)$

Si " x " tiende a 2, entonces sustituimos este valor donde haya " x " en la función dada.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3) \\ &= [(2)^2 - 3] \\ &= (4 - 3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Calcular los siguientes límites sustituyendo:

<https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw><https://www.youtube.com/watch?v=RdLtaXROIk>

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 3} = \frac{4^2 + 5(4) - 3}{4 + 3} = \frac{16 + 20 - 3}{7} = \frac{36 - 3}{7} = \frac{33}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{3x + 2} = \sqrt{3(7) + 2} = \sqrt{21 + 2} = \sqrt{23} = 4.79$$

$$= 23^{\frac{1}{2}}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=LyLYoQKkOOc><https://www.youtube.com/watch?v=jz3WrcPJWps>

Ejercicios:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-3x + 7) = (-3(1) + 7) = (-3 + 7) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} \right) = \left(\frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{3 - 3} \right) = \frac{18 - 15 - 3}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2 - 2x + 1}) = (\sqrt{(3)^2 - 2(3) + 1}) = (\sqrt{9 - 6 + 1}) (\sqrt{4}) = 2$$

Límites Indeterminados

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \quad \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{16 - 16}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{r}$$

$$\frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4 = 4+4 = 8 \quad \text{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} \quad \frac{5 - 5}{(5)^2 - 25} = \frac{5 - 5}{25 - 25} = \frac{0}{0} \quad \text{r}$$

$$\frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \quad \text{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \quad \frac{(2)^2 - 2(2)}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{r}$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} = x = 2 \quad \text{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{3x^2 - 21x} \quad \frac{7 - 7}{3(7)^2 - 21(7)} = \frac{0}{147 - 147} = \frac{0}{0} \quad \text{r}$$

$$\frac{x-7}{3x(x-7)} = \frac{1}{3x} = \frac{1}{21}$$

LUNA GARCÍA

CÁLCULO DIFERENCIAL

<https://www.youtube.com/watch?v=h9IEAU5-CSg>

https://www.youtube.com/watch?v=kO_D4w13vyg

https://www.youtube.com/watch?v=kO_D4w13vyg

https://www.youtube.com/watch?v=-G00rN5_bXU

<https://www.youtube.com/watch?v=yAy-cSuSKFc>

<https://www.youtube.com/watch?v=hivb5XPiFxc&t=51s>

<https://www.youtube.com/watch?v=1Z6c7hr85bU>

Comprobar si indeterminada <https://www.youtube.com/watch?v=1Z6c7hr85bU&t=25s>

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 15x} = \frac{5^2 - 5 - 20}{3(5)^2 - 15(5)} = \frac{20 - 20}{75 - 75} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Fact. } \frac{(x-5)(x+4)}{3x(x-5)} = \frac{x+4}{3x} = \frac{5+4}{3(5)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad R$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 49} = \frac{7^2 - 5(7) - 14}{49 - 49} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Fact: } \frac{(x+2)(x-7)}{(x+7)(x-7)} = \frac{x+2}{x+7} = \frac{7+2}{7+7} = \frac{9}{14}$$

$$x^2 - 7x + 2x - 14 = x^2 - 5x - 14$$

$$x^2 - 7x + 7x - 49$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 24}$$

$$\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x+6)} = \frac{x+4}{x+6} = \frac{4+4}{4+6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 5x - 21}{5x^2 + 15x} = \frac{5(-3)^2 + 15(-3)}{45 - 45} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Fact: } \frac{(x+3)(4x-7)}{5x(x+3)} = \frac{4x-7}{5x} = \frac{4(-3)-7}{5(-3)} = \frac{-19}{-15} = \frac{19}{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - (2)^2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)} = \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 4$$



DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

CÁLCULO DIFERENCIAL

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{8-x}} \cdot \frac{2+\sqrt{8-x}}{2+\sqrt{8-x}} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{8-x})}{(2)^2 - (\sqrt{8-x})^2} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{8-x})}{4-(8-x)}$$

$$= \frac{(x-4)(2+\sqrt{8-x})}{4-8+x} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{8-x})}{x-4} = 2+\sqrt{8-x} = \frac{2+\sqrt{8-4}}{1} = \frac{2+\sqrt{4}}{1} = \frac{2+2}{1} = 4$$



DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{11+x}-3}{x+2} \cdot \frac{\sqrt{11+x}+3}{\sqrt{11+x}+3} = \frac{(\sqrt{11+x})^2 - (3)^2}{(x+2)(\sqrt{11+x}+3)} = \frac{11+x-9}{(x+2)(\sqrt{11+x}+3)} = \frac{2+x}{(x+2)(\sqrt{11+x}+3)}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{11+x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{11+x}+3} = \frac{1}{\sqrt{11+(-2)}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

3.1.1. Límites al infinito

Un límite al infinito es aquel al que tiende $f(x)$ cuando la variable x se hace tan grande, tanto en positivo como en negativo, como queramos. Entonces la función $f(x)$ puede tender a un valor finito o puede diverger a infinito (límite infinito).

- Límite finito L cuando $x \rightarrow +\infty$

Existe un límite finito L cuando la variable x tiende a $+\infty$ si, en un entorno pequeño alrededor de L se cumple que, dentro de ese entorno, haciendo la variable x tan grande y positiva como se quiera, la diferencia $|f(x) - L|$ resulta tan pequeña como se quiera.

- Límite finito L cuando $x \rightarrow -\infty$

Existe un límite finito L cuando la variable x tiende a $-\infty$ si, en un entorno pequeño alrededor de L se cumple que, dentro de ese entorno, haciendo la variable x tan grande y negativa como se quiera, la diferencia $|f(x) - L|$ resulta tan pequeña como se quiera.

Solución de límites al infinito <https://www.youtube.com/watch?v=YwOBnHe1sz8>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5x - 10 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -3x^3 + 5x^2 - 7 = -\infty$$

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=YwOBnHe1sz8>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 25x - 2x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 5x - 4x^3 = -2x^3 - 5x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^4 = -(\infty)^4 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 25x - 2x = -2(-\infty) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 - 5x = -2(-\infty)^3 = \infty$$

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=yH5vcmoX3tM>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{12} = \frac{\infty}{12} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^2} = \frac{10}{\infty^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3 \cdot \cancel{x^2}}{5 \cdot \cancel{x^2}} = \frac{3}{5}$$

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=yH6vcnoX8tM>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4}{x^2} = \frac{-3\cancel{\infty^4}}{\infty^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5}{x^5} = \frac{2 \cdot \cancel{\infty^5}}{\cancel{\infty^5}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2} = \frac{3\cancel{\infty}}{\infty^2} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{250}{x^2} = \frac{250}{\infty^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{12} = \frac{\infty^3}{12} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6}{3x^6} = \frac{2 \cdot \cancel{\infty^6}}{3 \cdot \cancel{\infty^6}} = \frac{2}{3}$$

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=YijB5BhcFw8>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x}{2 + x + 10x^2} = \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{10x^2}{x^2}} = \frac{5 - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 10} = \frac{5 - 0}{0 + 0 + 10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 2x^3}{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1} = \frac{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} + \frac{2x^3}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \frac{3 + \frac{5}{x} + 2}{5 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{3 + 0 + 2}{5 - 0 + 0 + 0} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{k} &= \infty \\ \frac{k}{\infty} &= 0 \\ \frac{k}{0} &= \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x^3}{2x^2 - 3x} = \frac{\frac{3x^2}{x^3} + \frac{5x^3}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3}} = \frac{\frac{3}{x} + 5}{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{0 + 5}{0 - 0} = \frac{5}{0} = \infty$$

<https://www.youtube.com/watch?v=RERF3EXziSE>

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=RERF3EXziSE>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^3 + 8x^2 - 6}{2x^4 - 3x^5 + 7x^6} = \frac{\frac{4x^5}{x^6} - \frac{2x^3}{x^6} + \frac{8x^2}{x^6} - \frac{6}{x^6}}{\frac{2x^4}{x^6} - \frac{3x^5}{x^6} + \frac{7x^6}{x^6}}$$

$$\frac{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{8}{x^4} - \frac{6}{x^6}}{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 7} = \frac{0 - 0 + 0 - 0}{0 - 0 + 7} = \frac{0}{7} = 0 \quad \text{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x - 5x^3} = \frac{\frac{2x}{x^3}}{\frac{3x}{x^3} - \frac{5x^3}{x^3}} = \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 5} = \frac{0}{0 - 5} = \frac{0}{-5} = 0 \quad \text{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 2x^7 - 5x^8}{3x^6 + 2x^2 - 5x + 1} = \frac{\frac{x^6}{x^8} - \frac{2x^7}{x^8} - \frac{5x^8}{x^8}}{\frac{3x^6}{x^8} + \frac{2x^2}{x^8} - \frac{5x}{x^8} + \frac{1}{x^8}} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 5}{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^6} - \frac{5}{x^7} + \frac{1}{x^8}}$$

$$= \frac{0 - 0 - 5}{0 + 0 - 0 + 0} = \frac{-5}{0} = -\infty \quad \text{r}$$

Solución de límites al infinito

<https://www.youtube.com/watch?v=8xYvm5YCjLO>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5}{3x^3 + 5x^2 + 6x} = \frac{\frac{4x^5}{x^5} - \frac{6x^4}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{5}{x^5}}{\frac{3x^3}{x^5} + \frac{5x^2}{x^5} + \frac{6x}{x^5}} = \frac{4 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^5}}{\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{6}{x^4}}$$

$$= \frac{4 - 0 + 0 - 0}{0 + 0 + 0} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 1}{-2x^2 - 4x - 5} = \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{-2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = \frac{6 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{-2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{6 + 0 - 0}{-2 - 0 - 0}$$

$$= \frac{6}{-2} = -\frac{3}{1} = -3$$